

5.3.2 Matrices diagonalisables

Définition 5.17

Matrice diagonalisable

Une matrice carrée A est dite *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale D , c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P telle que :

$$P^{-1}AP = D$$

où D est diagonale.

Le lien avec les vecteurs propres est donné par le théorème fondamental suivant :

Théorème 5.18

Théorème de diagonalisation

Une matrice A de taille $n \times n$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de \mathbb{R}^n constituée de vecteurs propres de A .

Dans ce cas, si $P = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \cdots \ \vec{v}_n]$ où les \vec{v}_i sont des vecteurs propres linéairement indépendants associés aux valeurs propres λ_i , alors :

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Démonstration. (\Rightarrow) Supposons A diagonalisable. Il existe P inversible et D diagonale telles que $P^{-1}AP = D$.

Multiplions à gauche par P : $AP = PD$.

Écrivons $P = [\vec{v}_1 \ \cdots \ \vec{v}_n]$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Le produit matriciel donne : $AP = [A\vec{v}_1 \ \cdots \ A\vec{v}_n]$, et $PD = [\lambda_1\vec{v}_1 \ \cdots \ \lambda_n\vec{v}_n]$.

Donc $A\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i$ pour tout i , donc les colonnes de P sont bien des vecteurs propres de A .

Comme P est inversible, ses colonnes sont linéairement indépendantes (Théorème 2.23), donc forment une base de \mathbb{R}^n .

(\Leftarrow) La démonstration inverse suit le même raisonnement. \square

Exemple. Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Montrons qu'elle est diagonalisable.

Étape 1 : Calcul des valeurs propres

Le polynôme caractéristique de A est :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 10 \\ &= (\lambda - 5)(\lambda - 2) \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 5$ et $\lambda_2 = 2$.

Étape 2 : Calcul des vecteurs propres

Pour $\lambda_1 = 5$: On résout $(A - 5I)\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On obtient $-x + 2y = 0$, donc $x = 2y$. On choisit $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Pour $\lambda_2 = 2$: On résout $(A - 2I)\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On obtient $2x + 2y = 0$, donc $x = -y$. On choisit $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Étape 3 : Construction de P et D

Les vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 sont linéairement indépendants (ils ne sont pas colinéaires), donc ils forment une base de \mathbb{R}^2 . On construit :

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Vérification :

$$\text{On calcule } P^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Puis :

$$AP = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Et finalement :

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = D$$

La matrice A est donc diagonalisable.

Remarques 5.5.0.19. La matrice P est une matrice de changement de base : elle transforme la base canonique en une base de vecteurs propres. Dans cette nouvelle base, l'application linéaire associée à A a une représentation diagonale très simple.

Corollaire 5.20

Si une matrice $n \times n$ possède n valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable.

Démonstration. D'après le théorème d'indépendance linéaire, n vecteurs propres associés à n valeurs propres distinctes forment une base de \mathbb{R}^n . \square

Remarque importante 5.21

La réciproque est fautive : une matrice peut être diagonalisable sans avoir toutes ses valeurs propres distinctes.

Théorème 5.22*Critère de diagonalisabilité*

Une matrice A de taille $n \times n$ est diagonalisable si et seulement si les deux points suivants sont satisfaits :

1. Toutes les racines du polynôme caractéristique sont réelles (i.e., la somme des multiplicités algébriques des racines réelles égale n).
2. Pour chaque valeur propre λ , on a $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$.

Démonstration. (\Rightarrow) Supposons A diagonalisable de taille $n \times n$.

Il existe une base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ de \mathbb{R}^n constituée de vecteurs propres.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes. Pour chaque λ_i , notons :

— $\mathcal{B}_i = \{\vec{v}_j \in \mathcal{B} : A\vec{v}_j = \lambda_i \vec{v}_j\}$

— k_i le nombre de vecteurs dans \mathcal{B}_i

Comme $\mathcal{B}_i \subset E_{\lambda_i}$ et \mathcal{B}_i est linéairement indépendant :

$$k_i \leq \dim(E_{\lambda_i}) = m_g(\lambda_i)$$

Puisque $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{B}_i$ est une base de \mathbb{R}^n :

$$n = \sum_{i=1}^r k_i \leq \sum_{i=1}^r m_g(\lambda_i) \leq \sum_{i=1}^r m_a(\lambda_i)$$

Or le polynôme caractéristique est de degré n , donc $\sum_{i=1}^r m_a(\lambda_i) \leq n$ (la somme des multiplicités est inférieure au degré du polynôme).

De $n \leq \sum m_g(\lambda_i) \leq \sum m_a(\lambda_i) \leq n$, on obtient :

1. $\sum m_a(\lambda_i) = n$ (toutes les racines sont réelles)
2. $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$ pour tout i

(\Leftarrow) Si les conditions sont vérifiées : Pour chaque λ_i , on prend une base \mathcal{B}_i de E_{λ_i} avec $\dim(E_{\lambda_i}) = m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$.

L'union $\mathcal{B} = \bigcup_i \mathcal{B}_i$ contient $\sum m_a(\lambda_i) = n$ vecteurs.

Ces vecteurs sont linéairement indépendants (vecteurs propres de valeurs propres distinctes et bases d'espaces propres).

Donc \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^n constituée de vecteurs propres. □

Exemple. Exemple de matrice non diagonalisable (dimension 2)

Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Vérifions si A est diagonalisable.

Étape 1 : Calcul du polynôme caractéristique

$$\det(A - \lambda I) = 3 - \lambda \quad 03 - \lambda = (3 - \lambda)^2$$

La seule valeur propre est $\lambda = 3$ avec $m_a(\lambda) = 2$.

La somme des multiplicités algébriques vaut $2 = n$, donc **la condition 1 est satisfaite**.

Étape 2 : Calcul de la multiplicité géométrique

Pour $\lambda = 3$: On résout $(A - 3I)\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On obtient $y = 0$, donc l'espace propre est :

$$E_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Ainsi $m_g(\lambda) = 1$.

Vérification de la condition 2 : On a $m_g(\lambda) = 1 < 2 = m_a(\lambda)$, donc **la condition 2 n'est pas satisfaite**.

Conclusion : La matrice A n'est pas diagonalisable. Il est impossible de trouver une base de \mathbb{R}^2 constituée de vecteurs propres de A , car il n'existe qu'un seul vecteur propre linéairement indépendant (à un facteur scalaire près).

Exemple. Exemple de matrice non diagonalisable (dimension 3)

Soit $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Vérifions si B est diagonalisable.

Étape 1 : Calcul du polynôme caractéristique

$$\det(B - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)^2(5 - \lambda)$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$ avec $m_a(\lambda_1) = 2$ et $\lambda_2 = 5$ avec $m_a(\lambda_2) = 1$.

La somme des multiplicités algébriques vaut $2 + 1 = 3 = n$, donc **la condition 1 est satisfaite**.

Étape 2 : Calcul des multiplicités géométriques

Pour $\lambda_1 = 2$: On résout $(B - 2I)\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On obtient $y = 0$ et $z = 0$, donc l'espace propre est :

$$E_2 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Ainsi $m_g(\lambda_1) = 1 < 2 = m_a(\lambda_1)$.

Pour $\lambda_2 = 5$: On résout $(B - 5I)\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On obtient $-3x + y = 0$ et $-3y = 0$, donc $y = 0$ et $x = 0$. L'espace propre est :

$$E_5 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Ainsi $m_g(\lambda_2) = 1 = m_a(\lambda_2)$.

Vérification de la condition 2 : On a $m_g(\lambda_1) = 1 < 2 = m_a(\lambda_1)$, donc **la condition 2 n'est pas satisfaite**.

Conclusion : La matrice B n'est pas diagonalisable. On ne peut trouver que deux vecteurs propres linéairement indépendants (un pour $\lambda_1 = 2$ et un pour $\lambda_2 = 5$), ce qui est insuffisant pour former une base de \mathbb{R}^3 .

5.3.3 Méthode de diagonalisation

Méthode 5.23

Diagonalisation d'une matrice

Pour diagonaliser une matrice A de taille $n \times n$:

1. **Calculer le polynôme caractéristique** $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I}_n)$.
2. **Trouver les valeurs propres** en résolvant $p_A(\lambda) = 0$.
3. **Pour chaque valeur propre λ_i :**
 - Déterminer sa multiplicité algébrique $m_a(\lambda_i)$.
 - Calculer l'espace propre E_{λ_i} en résolvant $(A - \lambda_i \mathbb{I}_n) \vec{v} = \vec{0}$.
 - Trouver une base de E_{λ_i} et déterminer $m_g(\lambda_i) = \dim(E_{\lambda_i})$.
4. **Vérifier la diagonalisabilité :**
 - Si $\sum m_a(\lambda_i) < n$: non diagonalisable (racines complexes).
 - Si $m_g(\lambda_i) < m_a(\lambda_i)$ pour au moins un i : non diagonalisable.
 - Sinon : diagonalisable.
5. **Si diagonalisable, former :**
 - P = matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres.
 - D = matrice diagonale avec les valeurs propres correspondantes.

5.3.4 Exemples de diagonalisation

Exemple (Matrice 2×2 avec valeurs propres distinctes). Diagonalisons $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

1. **Polynôme caractéristique :**

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 5 - \lambda & 3 \\ 2 & 4 - \lambda \end{bmatrix} = (5 - \lambda)(4 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 9\lambda + 14$$

2. **Valeurs propres :**

$$\lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda - 7)(\lambda - 2) = 0$$

Donc $\lambda_1 = 7$ et $\lambda_2 = 2$.

3. Espaces propres :

Pour $\lambda_1 = 7$:

$$A - 7\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution : $2x_1 = 3x_2$, donc $E_7 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$.

Pour $\lambda_2 = 2$:

$$A - 2\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution : $x_1 = -x_2$, donc $E_2 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$.

4. Diagonalisation :

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemple (Matrice 3×3 avec valeur propre multiple). Diagonalisons $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Polynôme caractéristique : Comme A est triangulaire supérieure :

$$p_A(\lambda) = (2 - \lambda)^2(3 - \lambda)$$

2. Valeurs propres : $\lambda_1 = 2$ (double) et $\lambda_2 = 3$ (simple).

3. Espaces propres :

Pour $\lambda_1 = 2$:

$$A - 2\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution : $x_2 = -x_3$ et x_1 libre, donc $E_2 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. $m_g(2) = 2 = m_a(2)$

Pour $\lambda_2 = 3$:

$$A - 3\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution : $x_1 = x_2$ et $x_3 = 0$, donc $E_3 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$. $m_g(3) = 1 = m_a(3)$

4. Diagonalisation :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Exemple (Matrice non diagonalisable). Montrons que $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Polynôme caractéristique : $p_A(\lambda) = (3 - \lambda)^3$

Valeur propre : $\lambda = 3$ avec $m_a(3) = 3$.

Espace propre :

$$A - 3\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution : $x_2 = x_3 = 0$ et x_1 libre, donc $E_3 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

$m_g(3) = 1 < 3 = m_a(3)$, donc A n'est pas diagonalisable.

Exemple (Matrice symétrique). Diagonalisons $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Polynôme caractéristique : En développant, on trouve : $p_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 4)$

Valeurs propres : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4$.

Espaces propres : - $E_1 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ - $E_3 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ - $E_4 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

5.4 Applications

5.4.1 Calcul de puissances de matrices

Si A est diagonalisable avec $A = PDP^{-1}$, alors :

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Cette formule est très efficace car D^k est simplement :

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Exemple. Pour $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ avec $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$:

$$A^{100} = P \begin{bmatrix} 7^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix} P^{-1}$$

En particulier :

$$A^5 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16807 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10097 & 10065 \\ 6710 & 6742 \end{bmatrix}$$

Exemple (Application aux suites récurrentes). Considérons la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases} \quad \text{avec } u_0 = 1, v_0 = 0$$

Posons $X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$. Alors $X_{n+1} = AX_n$ où $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Donc $X_n = A^n X_0$. Avec la diagonalisation de A :

$$X_n = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Après calcul :

$$u_n = \frac{3 \cdot 7^n + 2 \cdot 2^n}{5}, \quad v_n = \frac{2 \cdot 7^n - 2 \cdot 2^n}{5}$$

5.4.2 Applications géométriques

Exemples (Rotation dans le plan). La matrice de rotation d'angle θ :

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

a pour polynôme caractéristique :

$$p_{R_\theta}(\lambda) = \lambda^2 - 2 \cos \theta \cdot \lambda + 1$$

Les valeurs propres sont $\lambda = \cos \theta \pm i \sin \theta = e^{\pm i\theta}$ (complexes si $\theta \neq 0, \pi$).

Pour $\theta = \pi$ (rotation de 180), $R_\pi = -\mathbb{I}_2$ est diagonale avec $\lambda = -1$ (double).

Exemples (Symétrie orthogonale). La symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x \tan(\alpha)$ a pour matrice :

$$S_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres sont toujours $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$ avec :

- E_1 = droite de symétrie
- E_{-1} = droite perpendiculaire

5.4.3 Extension aux espaces vectoriels quelconques

Définition 5.24

Valeurs et vecteurs propres d'une application linéaire

Soit $T : V \rightarrow V$ une application linéaire où V est un espace vectoriel de dimension finie.

- Un vecteur non nul $v \in V$ est un *vecteur propre* de T s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $T(v) = \lambda v$.
- Le scalaire λ est alors une *valeur propre* de T .
- L'espace propre est $E_\lambda = \{v \in V | T(v) = \lambda v\}$.

Exemples (Opérateur de dérivation sur les polynômes). Soit $V = \mathbb{P}_3$ et $T : V \rightarrow V$ définie par $T(p) = p'$ (dérivation).

Dans la base $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$, la matrice de T est :

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale, donc la seule valeur propre est $\lambda = 0$ avec $m_a(0) = 4$.

L'espace propre $E_0 = \{p \in \mathbb{P}_3 : p' = 0\}$ est l'ensemble des polynômes constants, donc $E_0 = \text{Vect}(1)$ et $m_g(0) = 1 < 4$.

L'opérateur de dérivation n'est pas diagonalisable sur \mathbb{P}_3 .

Exemples (Application linéaire sur \mathbb{P}_2). Soit $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ définie par $T(p(x)) = p(2-x)$.

Pour trouver les valeurs propres, cherchons p tel que $p(2-x) = \lambda p(x)$.

- Si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, alors :

$$p(2-x) = a_0 + a_1(2-x) + a_2(2-x)^2 = (a_0 + 2a_1 + 4a_2) + (-a_1 - 4a_2)x + a_2x^2$$

Dans la base $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$, la matrice est :

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres sont $\lambda = 1$ (double) et $\lambda = -1$ (simple).

— $E_1 = \text{Vect}(1, x^2 - 2x)$ (polynômes symétriques par rapport à $x = 1$)

— $E_{-1} = \text{Vect}(x - 1)$ (polynômes antisymétriques)

T est diagonalisable car $m_g(1) = 2 = m_a(1)$ et $m_g(-1) = 1 = m_a(-1)$.

Exemples (Matrices 2×2 vues comme espace vectoriel). Considérons $V = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et $T : V \rightarrow V$ définie par $T(M) = M^T$ (transposition).

Cherchons les matrices M telles que $M^T = \lambda M$:

- Si $\lambda = 1 : M^T = M$, donc M est symétrique. $E_1 = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$, donc $m_g(1) = 3$.

- Si $\lambda = -1 : M^T = -M$, donc M est antisymétrique. $E_{-1} = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right)$, donc $m_g(-1) = 1$.

Comme $\dim(V) = 4 = m_g(1) + m_g(-1)$, l'opérateur de transposition est diagonalisable.

Chapitre 6 : Orthogonalité et méthode des moindres carrés

6.1 Introduction et motivation

Dans la vie courante, nous sommes familiers avec la notion d'angle droit et de perpendicularité. En géométrie plane, deux droites sont perpendiculaires si elles forment un angle de 90 degrés. Cette notion intuitive peut être généralisée aux espaces de dimension supérieure grâce au concept de *produit scalaire*.

L'orthogonalité joue un rôle fondamental en algèbre linéaire car elle permet de :

- Simplifier considérablement les calculs avec des bases orthogonales
- Résoudre des problèmes d'approximation (méthode des moindres carrés)
- Décomposer des espaces vectoriels en sous-espaces orthogonaux
- Comprendre la géométrie des transformations linéaires

Rappel. Soit maintenant $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs quelconques. Comme $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ est une

matrice de taille $n \times 1$ alors que $\vec{u}^T = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n]$ est une matrice de taille $1 \times n$, le produit matriciel $\vec{v}\vec{u}^T$ est une matrice de taille $n \times n$ et le produit matriciel $\vec{u}^T\vec{v}$ est une matrice de taille 1×1 , autrement dit, un nombre réel.

6.2 Produit scalaire et norme

Définition 6.1

Produit scalaire euclidien

Soit $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ deux vecteurs de \mathbb{R}^n .

Le *produit scalaire euclidien* de \vec{u} et \vec{v} est le nombre réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n = \sum_{i=1}^n u_iv_i$$

En notation matricielle, on peut aussi écrire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v}$

Exemples. 1. Si $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ dans \mathbb{R}^3 , alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 8 - 3 - 2 = 3$$

2. Si $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ dans \mathbb{R}^4 , alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 3 + 0 - 1 - 2 = 0$$

Propriété 6.2

Propriétés du produit scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$:

Commutativité $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Linéarité — $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

$$— \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$— (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v})$$

Positivité $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$, avec égalité si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$

Démonstration. — **Commutativité** On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$

$$\text{et } \vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v}^T \vec{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n.$$

Par commutativité de la multiplication dans \mathbb{R} , on a $u_i v_i = v_i u_i$ pour tout i , donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

— **Distributivité à gauche** $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} + \vec{v})^T \vec{w} = (\vec{u}^T + \vec{v}^T) \vec{w} = \vec{u}^T \vec{w} + \vec{v}^T \vec{w} =$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

— **Distributivité à droite** La commutativité et la distributivité à gauche impliquent la distributivité à droite.

— $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = (\lambda \vec{u})^T \vec{v} = \lambda \vec{u}^T \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$

$$\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \vec{u}^T (\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{u}^T \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

— **Positivité** $\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 \geq 0$

Pour avoir une somme nulle, il faut que chaque terme soit nul : $u_j^2 = 0$ pour tout j . Autrement dit, $u_j = 0$ pour tout j .

Réciproquement, si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$.

□

Remarque 6.6.0.3. $\vec{u} \cdot (\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p) = \lambda_1 \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{u} \cdot \vec{v}_2 + \dots + \lambda_p \vec{u} \cdot \vec{v}_p$.

Définition 6.4

Norme euclidienne

La *norme* (euclidienne) d'un vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

Un vecteur \vec{u} est dit *unitaire* si $\|\vec{u}\| = 1$.

Exemples. 1. Pour $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ dans \mathbb{R}^2 :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

2. Pour $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ dans \mathbb{R}^3 :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

3. Le vecteur $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ est unitaire car :

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

Remarque 6.6.0.5. Si \vec{u} est un vecteur non nul, alors le vecteur

$$\frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

est un vecteur unitaire.

Propriété 6.6

Si $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \|\lambda \vec{u}\|^2 &= (\lambda \vec{u}) \cdot (\lambda \vec{u}) \\ &= \lambda(\vec{u} \cdot (\lambda \vec{u})) \\ &= \lambda(\lambda(\vec{u} \cdot \vec{u})) \\ &= \lambda^2(\vec{u} \cdot \vec{u}) \\ &= \lambda^2 \|\vec{u}\|^2 \end{aligned}$$

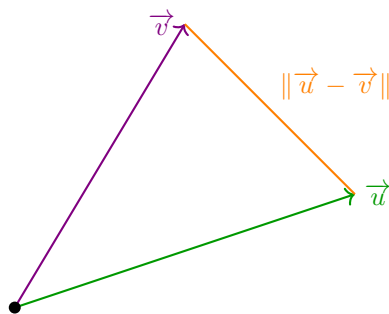
En prenant la racine carrée des deux côtés, on obtient $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$. □

Définition 6.7

Distance entre vecteurs

La *distance* entre deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} dans \mathbb{R}^n est :

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$$



6.3 Orthogonalité

Définition 6.8

Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de \mathbb{R}^n sont dits *orthogonaux* si :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

On note alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Remarques 6.6.0.9. 1. Le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur de \mathbb{R}^n .

2. L'orthogonalité généralise la notion de perpendicularité du plan et de l'espace à \mathbb{R}^n .

Exemples. 1. Les vecteurs $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont orthogonaux :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 9 + 3 \cdot 1 = 6 - 9 + 3 = 0$$

2. Dans \mathbb{R}^3 , les vecteurs de la base canonique sont deux à deux orthogonaux :

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En effet : $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ pour $i \neq j$.

Théorème 6.10

Théorème de Pythagore

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de \mathbb{R}^n . Alors :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

Démonstration. On développe $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$:

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

Donc $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. □

Définition 6.11*Complément orthogonal*

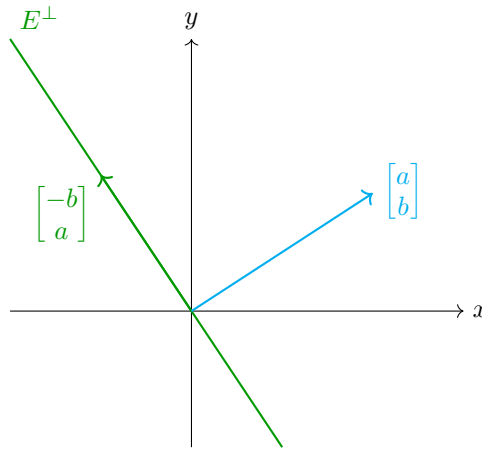
Soit E un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . Si $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ est orthogonal à tous les vecteurs de E , alors on dit que \vec{x} est orthogonal à E .

Le *complément orthogonal* de E est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à E .

$$E^\perp = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} \cdot \vec{v} = 0 \forall \vec{v} \in E \}$$

Exemples. 1. $n = 2$: Si $E = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\}$, alors

$$E^\perp = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0 \right\}$$



2. $n = 3$: Si $E = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right\}$, alors

$$E^\perp = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0 \right\}$$

C'est un plan de vecteur normal $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

Propriété 6.12

Si E est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n , alors E^\perp est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n

Démonstration. 1. Le vecteur nul appartient à E^\perp : en effet, $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0$ pour tout $\vec{v} \in E$.

2. Soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in E^\perp$. Alors pour tout $\vec{v} \in E$:

$$(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot \vec{v} = \vec{u}_1 \cdot \vec{v} + \vec{u}_2 \cdot \vec{v} = 0 + 0 = 0$$

Donc $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \in E^\perp$.

3. Soit $\vec{u} \in E^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $\vec{v} \in E$:

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot 0 = 0$$

Donc $\lambda \vec{u} \in E^\perp$.

Ainsi, E^\perp est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . □

Propriété 6.13

Si W est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , alors :

1. $W \subset (W^\perp)^\perp$
2. $W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$

Démonstration. 1. Montrons que $W \subset (W^\perp)^\perp$. Soit $\vec{w} \in W$. Pour tout $\vec{u} \in W^\perp$, on a par définition $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$, donc $\vec{w} \in (W^\perp)^\perp$.

2. Montrons que $W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$.

$\{\vec{0}\} \subset W \cap W^\perp$ car $\vec{0} \in W^\perp$ et $\vec{0} \in W$.

Réciproquement, soit $\vec{u} \in W \cap W^\perp$. Alors $\vec{u} \in W$ et $\vec{u} \in W^\perp$. Comme $\vec{u} \in W^\perp$, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ pour tout $\vec{v} \in W$. En particulier, en prenant $\vec{v} = \vec{u}$, on obtient :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$$

Par positivité du produit scalaire, cela implique $\vec{u} = \vec{0}$.

Donc $W \cap W^\perp \subset \{\vec{0}\}$, et finalement $W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$. □

Remarque 6.6.0.14. Nous verrons plus tard qu'en fait, $W = (W^\perp)^\perp$.

Propriété 6.15

Soit $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ k vecteurs de \mathbb{R}^n . Soit $E = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ et $W = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$.

On a :

$$W^\perp = E^\perp$$

Autrement dit, $\vec{x} \in W^\perp \Leftrightarrow \vec{x}$ est orthogonal à un système de générateurs de W .

Démonstration. On va montrer $W^\perp \subset E^\perp$ et $E^\perp \subset W^\perp$, d'où l'égalité.

$W^\perp \subset E^\perp$: Si $\vec{x} \in W^\perp$, alors $\vec{x} \cdot \vec{w} = 0$ pour tout $\vec{w} \in W$, d'où $\vec{x} \cdot \vec{v}_j = 0$ pour tout

$j \in \{1, \dots, k\}$, autrement dit, $\vec{x} \in E^\perp$.

$E^\perp \subset W^\perp$: Si $\vec{x} \in E^\perp$, alors $\vec{x} \cdot \vec{v}_j = 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$. Comme $W = \text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$, tout vecteur $\vec{w} \in W$ s'écrit :

$$\vec{w} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k$$

On a donc

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{w} &= \vec{x} \cdot (\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k) \\ &= \lambda_1 (\vec{x} \cdot \vec{v}_1) + \dots + \lambda_k (\vec{x} \cdot \vec{v}_k) \\ &= \lambda_1 \cdot 0 + \dots + \lambda_k \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

d'où $\vec{x} \in W^\perp$. □

Propriété 6.16

$$\text{Ker}(A^T) = (\text{Im}(A))^\perp$$

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Alors

$$\text{Ker}(A^T) = (\text{Im}(A))^\perp.$$

Démonstration. On écrit $A = [\vec{a}_1 \ \dots \ \vec{a}_n]$, de sorte que

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n).$$

Pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$,

$$A^T \vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1^T \vec{x} \\ \vdots \\ \vec{a}_n^T \vec{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{x} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \cdot \vec{x} \end{bmatrix}.$$

Ainsi

$$\vec{x} \in \text{Ker}(A^T) \iff A^T \vec{x} = \vec{0} \iff \vec{a}_j \cdot \vec{x} = 0 \text{ pour tout } j.$$

Comme les \vec{a}_j engendrent $\text{Im}(A)$, cela revient à dire que \vec{x} est orthogonal à tout vecteur de $\text{Im}(A)$, c'est-à-dire

$$\vec{x} \in (\text{Im}(A))^\perp.$$

On obtient donc $\text{Ker}(A^T) = (\text{Im}(A))^\perp$. □

Méthode 6.17*Méthode pour déterminer W^\perp .*

Soit $W \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel de dimension $1 \leq k \leq n$. Pour trouver une base de W^\perp , il suffit d'appliquer la méthode suivante.

1. Trouver une base $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k)$ de W .
2. Construire la matrice A de taille $k \times n$ dont les lignes sont les vecteurs $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k$. Par construction, $\text{Lgn}(A) = W$. Comme $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k\}$ est libre, on a $\text{rang}(A) = k$.
3. Résoudre le système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ pour trouver $W^\perp = \text{Ker}(A)$. Le théorème du rang nous donne $\dim(W^\perp) = n - k$.

Remarque 6.6.0.18. *Puisque les lignes de A sont les colonnes de A^T , $\text{Lgn}(A) = \text{Im}(A^T)$, et par la propriété 6.16, $\text{Ker}(A) = (\text{Im}(A^T))^\perp = (\text{Lgn}(A))^\perp$.*

Donc, comme $\text{Lgn}(A) = W$, on a bien $\text{Ker}(A) = W^\perp$.

Exemple. Soit $W = \text{Vect}(\vec{w}_1, \vec{w}_2) \subset \mathbb{R}^4$ où

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Déterminons une base de W^\perp .

Étape 1 : Base de W .

Les vecteurs \vec{w}_1 et \vec{w}_2 ne sont pas colinéaires, donc (\vec{w}_1, \vec{w}_2) est une base de W .

Étape 2 : Construction de la matrice A .

On construit la matrice A de taille 2×4 dont les lignes sont les vecteurs \vec{w}_1 et \vec{w}_2 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Par construction, $\text{Lgn}(A) = W$ et $\text{rang}(A) = 2$.

Étape 3 : Résolution du système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$.

On cherche $W^\perp = \text{Ker}(A)$. Le système $A\vec{x} = \vec{0}$ s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Échelonnons la matrice des coefficients :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

On obtient :

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - x_4 \\ x_2 = x_3 + x_4 \end{cases}$$

Les variables libres sont x_3 et x_4 . La solution générale est :

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -x_3 - x_4 \\ x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ainsi, } W^\perp = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \right).$$

6.4 Ensembles orthogonaux et bases orthogonales

Définition 6.19

Ensemble orthogonal

Un ensemble de vecteurs $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ dans \mathbb{R}^n est dit *orthogonal* si les vecteurs sont deux à deux orthogonaux :

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0 \quad \text{pour tout } i \neq j$$

Si de plus chaque vecteur est unitaire ($\|\vec{u}_i\| = 1$ pour tout i), l'ensemble est dit *orthonormé*.

Exemples. 1. L'ensemble $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ est orthogonal dans \mathbb{R}^2 :

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot (-4) + 4 \cdot (3) = -12 + 12 = 0$$

2. L'ensemble $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$ est orthonormé dans \mathbb{R}^3 .

3. L'ensemble $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ est orthogonal dans \mathbb{R}^3 . Cependant, cet ensemble n'est pas linéairement indépendant à cause du vecteur nul.

4. Tout sous-ensemble de la base canonique de \mathbb{R}^n est orthogonal.

Remarque 6.6.0.20. Si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ est orthogonal et que tous les vecteurs sont non nuls, alors $\left\{ \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}, \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|}, \dots, \frac{\vec{u}_k}{\|\vec{u}_k\|} \right\}$ est orthonormé.

Théorème 6.21

Indépendance linéaire des vecteurs orthogonaux

Si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ est un ensemble orthogonal **de vecteurs non nuls** dans \mathbb{R}^n , alors ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Démonstration. Supposons que $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_k\vec{u}_k = \vec{0}$.

En prenant le produit scalaire avec \vec{u}_i :

$$0 = \vec{u}_i \cdot (c_1\vec{u}_1 + \dots + c_k\vec{u}_k) = c_i(\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i) = c_i\|\vec{u}_i\|^2$$

Comme $\vec{u}_i \neq \vec{0}$, on a $\|\vec{u}_i\|^2 > 0$, donc $c_i = 0$ pour tout i . \square

Corollaire 6.22

Si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ est un ensemble orthogonal de **vecteurs non nuls** dans \mathbb{R}^n , alors c'est une base de Vect $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k)$.

Définition 6.23

Base orthogonale et orthonormée

Si W est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , de dimension k et $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ une base de W . On dit que cette base est :

- *orthogonale* si $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$ pour $i \neq j$
- *orthonormée* si elle est orthogonale et $\|\vec{u}_i\| = 1$ pour tout i

Exemples. 1. La base canonique est une base orthonormée de \mathbb{R}^n .

2. $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ est une base orthogonale de \mathbb{R}^3 . Cependant, cette base n'est pas orthonormée car $\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{2} \neq 1$.

3. $\mathcal{B}' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ est une base orthonormée de \mathbb{R}^3 .

Théorème 6.24

Coordonnées dans une base orthogonale

Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une base orthogonale de \mathbb{R}^n .

Pour tout vecteur $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$, les coordonnées de \vec{w} dans la base \mathcal{B} sont :

$$\vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 + \dots + \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_n}{\vec{u}_n \cdot \vec{u}_n} \vec{u}_n$$

Si la base est orthonormée, la formule se simplifie :

$$\vec{w} = (\vec{w} \cdot \vec{u}_1) \vec{u}_1 + (\vec{w} \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_2 + \dots + (\vec{w} \cdot \vec{u}_n) \vec{u}_n$$